

## О Т Ч Е Т Ъ О ЗАНЯТІЯХЪ ВЪ ЛЕЙПЦИГѢ,

КОМАНДИРОВАННАГО ЗА ГРАНИЦУ СЪ УЧЕНОЮ ЦѢЛЮ,  
ДОЦЕНТА ИМПЕРАТОРСКАГО ХАРЬКОВСКАГО УНИВЕРСИТЕТА

*Матвѣя Тихомандрицкаго.*

Отправляясь за границу съ цѣлью ознакомленія съ тѣмъ состояніемъ, въ которомъ находится тамъ въ настоящее время ученіе о функціяхъ вообще и Абелевыхъ въ-особенности, и главнымъ образомъ съ Вейерштрассовскою теоріей послѣднихъ, я избралъ Лейпцигъ первымъ пунктомъ своего пребыванія за границей вслѣдствіе того, что въ лѣтній семестръ Вейерштрассъ долженъ былъ читать не Абелевы интегралы, а варіаціонное исчисленіе; въ Лейпцигѣ же проф. Клейнъ читалъ въ это время вторую часть теоріи эллиптическихъ функцій, и мнѣ, какъ занимающемуся этимъ предметомъ, интересно было познакомиться съ преподаваніемъ его такимъ ученымъ, какъ Клейнъ. Но еще болѣе меня привлекало въ Лейпцигъ то обстоятельство, что Клейнъ занимался и Римановою теоріей алгебраическихъ функцій и ихъ интеграловъ; слѣдовательно, я могъ получить отъ него разъясненіе многихъ неясныхъ пунктовъ этой теоріи, а также вопроса о томъ, какъ подошелъ Риманъ къ своей теоріи; объ этомъ же какъ-разъ Клейнъ издалъ брошюру, о которой рѣчь будетъ ниже.

Въ Лейпцигѣ я пріѣхалъ  $\frac{22 \text{ мая}}{3 \text{ июня}}$  сего года, на другой день Троицына дня, когда начинаются здѣсь каникулы Pfingstferien, длящаяся недѣлю. Эту недѣлю я употребилъ на ознакомленіе съ мѣстоположеніемъ университетскихъ зданій, а также на просмотръ купленныхъ мною у Тэйбнера книгъ.

Математическія лекціи читаются главнымъ образомъ въ особомъ зданіи — Чермакскомъ институтѣ, который находится въ 15-минутномъ разстояніи отъ университета въ юго-восточной части города, между зданіями зоологическаго и сельско-хозяйственнаго институтовъ, на Teich-Str. Это небольшое зданіе, полукруглое спереди, гдѣ аудиторія, выстроенная амфитеатромъ, первоначально, должно полагать, предназначалось для преподаванія естественныхъ наукъ; тѣмъ не менѣе оно весьма удобно и для лекцій по математикѣ; слышно въ аудиторіи съ послѣдней скамьи также хорошо какъ и съ первой и, благодаря освѣщенію сверху, доска никогда не отсвѣчиваетъ. Доска состоитъ изъ двухъ частей, соединенныхъ перекинутыми чрезъ блоки веревками: написанная половина, если нужно сохранить формулы, поднимается, и пишутъ на другой, спущенной на высоту удобную для профессора. Позади аудиторіи находится комната съ гипсовыми моделями разныхъ кривыхъ поверхностей, другая комната — чертежная и третья — Sprechzimmer des Docenten, гдѣ профессоръ по окончаніи лекціи даетъ желающимъ объясненія. Прежде въ этомъ зданіи помѣщался и математическій семинаръ (Königliches mathematisches Seminar der Universität), нынѣ же онъ помѣщается на Ritterstrasse № 14. Квартира семинара состоитъ изъ двухъ Sprechzimmer des Docenten, аудиторіи, въ которой происходятъ разъ въ недѣлю чтенія сообщеній семинаристовъ и профессоровъ, а также занимаются черченіемъ; бібліотеки, читальни, гдѣ лежатъ вновь выходящія періодическія изданія и книги, и двухъ Arbeitszimmer. Открытъ семинаръ лѣтомъ съ 7-ми

часовъ утра до 8-ми вечера. Прислуги въ квартирѣ семинара нѣтъ; поэтому каждому семинаристу дается ключъ отъ дверей того отдѣленія, гдѣ библіотека и кабинеты, а также другой отъ ящика въ столѣ, гдѣ онъ можетъ хранить свои вещи; приходя въ удобное для него время, онъ можетъ заниматься такъ, какъ у себя въ кабинетѣ, доставая самъ изъ библіотеки все, что ему нужно; на-домъ брать ничего не дозволяется. Такъ-какъ семинаръ существуетъ всего три года, на скромныя средства, то понятно, что библіотека еще не можетъ быть богатою: она еще формируется; но уже и теперь она содержитъ много полезнаго: журналъ *Crell*'я съ 50-го тома, *Mathematische Annalen* съ основанія; записки берлинской, вѣнской, парижской академій и другія математическія періодическія изданія, въ томъ числѣ и американскій математическій журналъ, основанный Сильвестромъ (вернувшимся теперь въ Оксфордъ), за послѣдніе годы, также сочиненія Абеля, Якоби, Гаусса, Римана, Штейнера, Плюкера, Эйзенштейна, Шаля, Ли (все статьи о частныхъ дифференціальныхъ уравненіяхъ собраны въ одинъ томъ), Неймана; Коши, Лагранжа, Лапласа новыя изданія также пріобрѣтаются; кромѣ того, тамъ имѣются рукописныя лекціи Клейна, Майера, Дика, Вейерштрасса, Кронекера, что для меня было весьма важно. Каждый семинаристъ вноситъ 10 марокъ за семестръ. Большею частію они доктора или докторанты; былъ между ними и приватъ-доцентъ изъ Праги. Въ семинарѣ кромѣ проф. Клейна, который состоитъ директоромъ семинара, занимается и проф. Майеръ; также приватъ-доцентъ Шуръ. Занятія семинаристовъ состоятъ обыкновенно въ самостоятельной разработкѣ разныхъ частныхъ вопросовъ изъ области преподаваемого на лекціяхъ. Разъ въ недѣлю, по понедѣльникамъ, происходятъ собранія, на которыхъ, послѣ прочтенія протокола предыдущаго засѣданія, одинъ изъ семинаристовъ читаетъ свою работу, во время чего, если нужно, проф. Клейнъ дѣлаетъ замѣчанія или возраженія, а по

окончаніи иногда резюмируетъ, или дополняетъ, или ставитъ новый вопросъ. Большая часть рефератовъ, мною слышанныхъ, были спеціальнаго характера, относясь къ частнымъ вопросамъ дѣленія и преобразованія эллиптическихъ функцій — о чемъ въ то время читалъ проф. Клейнъ, и только мое сообщеніе «объ обращеніи эллиптическихъ интеграловъ» (которое г. Клейнъ хотѣлъ напечатать въ *Mathem. Annalen*\* и русскій переводъ котораго мною представленъ въ математическое общество при Императорскомъ харьковскомъ университетѣ\*\*) имѣло уклоняющійся характеръ. Засѣданія семинара мнѣ напомнили нѣсколько засѣданія нашего математическаго общества.

Математическій семинаръ навѣщается обыкновенно всѣми заѣзжающими въ Лейпцигъ математиками; здѣсь я встрѣтилъ, между прочими, профессора дерптскаго университета Линдштедта, Шуберта изъ Гамбурга, извѣстнаго проф. Вебера изъ Берлина (теперь перешелъ въ марбургскій университетъ), котораго солидными работами многое разъяснено въ теоріи Абелевыхъ интеграловъ.

Я позволилъ себѣ распространиться о математическомъ семинарѣ, доступъ въ который мнѣ любезно открылъ проф. Клейнъ даже и на каникулярное время (августъ, сентябрь), не только потому, что, благодаря этому учрежденію, я получилъ возможность въ короткое время пріобрѣсти общее знакомство съ литературою занимающаго меня предмета и такимъ образомъ подготовиться къ дальнѣйшимъ моимъ занятіямъ, но также и потому, что я признаю пользу такого института не только для начинающихъ ученыхъ, которымъ онъ доставляетъ много удобствъ для занятій и руководство опытныхъ ученыхъ, но также и для самихъ руководителей, которымъ онъ доставляетъ сотрудниковъ; много частныхъ вопросовъ и задачъ, представляющихся при круп-

\* Напечатано въ XXV т.

\*\* См. III книжку «Сособщеній» за 1884 г.

номъ научномъ изслѣдованіи, не требующихъ особенной подготовки, но много времени, весьма полезно — въ видахъ сбереженія своего времени и силъ для преодоленія болѣе существенныхъ трудностей главнаго вопроса — предоставлять своимъ ученикамъ, которые болѣе пользы извлекутъ какъ для своего развитія, такъ и для науки, трудясь надъ рѣшеніемъ вопросовъ и задачъ непридуманныхъ нарочно какъ примѣры для упражненія, но выдвинутыхъ на очередь ходомъ развитія науки, и потому всегда, какъ все живое, болѣе способныхъ вызвать интересъ къ себѣ и побудить къ труду. Много изслѣдованій, напечатанныхъ въ *Mathem. An.*, журналѣ *Schlömilch'a*, а также нѣкоторые изъ помѣщенныхъ въ итальянскихъ журналахъ и др., получили свое начало въ семинарѣ Клейна (въ которомъ всегда бываетъ нѣсколько иностранцевъ). Въ семинарѣ молодые люди, занимаясь въ одно время родственными вопросами, легче могутъ вступать въ обмѣнъ мыслей между собою и такимъ образомъ поддерживать другъ друга въ научной работѣ. Постояннымъ обмѣномъ мыслей Клебша съ товарищами по наукѣ и учениками объясняютъ его біографы его чрезвычайную научную продуктивность.

Проф. Клейнъ, ученикъ Плюкера и Клебша, отчасти Кронекера и Вейерштрасса, принадлежитъ къ той школѣ математиковъ, наиболѣе, какъ кажется, въ настоящее время распространенной въ Германіи, которые не полагаютъ рѣзкаго разграниченія между чистымъ анализомъ и геометрией и не только анализъ примѣняютъ къ геометріи, но и геометрію къ анализу. Въ университетѣ занимаетъ онъ кафедру геометріи, и нынѣшній зимній семестръ будетъ читать элементарный курсъ проективной геометріи (въ семинарѣ же будутъ продолжаться занятія эллиптическими функціями), но въ различное время читалъ и разные другіе курсы. Такъ, я видѣлъ въ семинарѣ его лекціи о рѣшеніи уравненія 5-й степени. Изъ этого курса, вновь переработаннаго, вышла только-что изданная имъ книга подъ загла-

вѣмъ: «Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade». Leipz. B. G. Teubner. 1884. Этотъ курсъ большой и трудный, а потому при всемъ интересѣ, который онъ возбуждалъ во мнѣ, я въ виду большой затраты времени, которой потребовало бы основательное изученіе его, долженъ былъ воздержаться отъ этого уклоненія отъ прямой моей задачи, тѣмъ болѣе, что ожидался выходъ только-что названной книги. Изъ курсовъ проф. Клейна я познакомился съ двумя: съ курсомъ теоріи эллиптическихъ функцій, читаннымъ въ зимній и лѣтній семестры нынѣшняго года, и курсомъ «Functionentheorie in geometrischer Behandlungsweise» — въ зимній и лѣтній семестры 1880—1881 г. Курсъ теоріи эллиптическихъ функцій состоитъ изъ двухъ частей: въ первой, прочитанной въ зимній семестръ 18<sup>83</sup>/<sub>84</sub> года, рассматриваются эллиптическіе интегралы и функціи въ обыкновенномъ смыслѣ, во второй, читанной въ лѣтній семестръ, рассматриваются эллиптическіе Modulfunctionen, т. е. въ зависимости не только отъ аргумента, но и отъ обоихъ періодовъ. Въ первой части показывается выводъ эллиптическихъ интеграловъ трехъ родовъ по Клебшу въ зависимости отъ плоской кривой третьяго порядка перваго рода, а также отъ кривой 4 порядка, происходящей отъ пересѣченія двухъ цилиндровъ второго порядка; рассматриваются и сравниваются между собою различныя каноническія формы эллиптическихъ интеграловъ: Лежандровская, Римановская и Вейерштрассовская. Последняя получается такимъ образомъ, что сперва находятся «ирраціональные инварианты» полинома 4. степени, т. е. функціи корней его; потомъ изъ нихъ составляются такіе инварианты, которые выражаются раціонально чрезъ коэффициенты полинома. Затѣмъ показывается изображеніе одной плоскости на другой съ помощію эллиптич. интеграловъ. Періодичность выводится по Риману. За основную эллиптическую функцію берется не  $\sin \pi u$ , а Вейерштрассовская  $p(u)$ . Въ заключеніе показы-

вается разложение эллиптич. функцій въ ряды и безконечныя произведенія и вводится функція  $\sigma(u)$  Вейерштрасса, которая сравнивается съ Якобьевскими  $\Theta$ -функціями. Изъ второй части курса я прослушалъ только вторую половину, посвященную умноженію, преобразованію и дѣленію эллиптическихъ функцій, которая существенно новаго для меня ничего не представляла кромѣ того, что вмѣсто  $\sin am u$  и  $\Theta(u)$  фигурировали  $p(u)$  и  $\sigma(u)$ , благодаря чему дѣло представлялось проще, и это потому, что функція  $p(u)$ , зависящая по своему опредѣленію отъ инвариантовъ, не измѣняется отъ линейныхъ преобразованій періодовъ съ опредѣлителемъ  $= 1$ , тогда какъ Лежандровскій модуль  $k^2$  принимаетъ вслѣдствіе этого 6 формъ. Въ пропущенной мною части, которая была подготовительною къ этой, эллиптическія функціи разсматривались какъ функціи періодовъ. Хотя листы лекцій Клейна появлялись въ семинарѣ обыкновенно чрезъ недѣлю по прочтеніи лекціи, тѣмъ не менѣе мнѣ не удалось прочитать этой части его курса, такъ-какъ она постоянно находилась въ употребленіи у его слушателей; на каникулы же, уѣзжая изъ Лейпцига, Клейнъ взялъ ихъ съ собою, чтобы пересмотрѣть. Судя по предисловію къ вышеупомянутой книгѣ его, можно полагать, что онъ приготавливаетъ другое сочиненіе: *Die Lehre von den elliptischen Modulfunctionen*, изъ котораго можно будетъ познакомиться и съ этою частію курса. На лекціяхъ пр. Клейнъ вычисленій обыкновенно не производитъ, ограничиваясь большею частію указаніемъ приѣмовъ и сообщеніемъ результатовъ. Это имѣетъ для развитыхъ слушателей то преимущество, что процессъ вычисленія не отвлекаетъ ихъ отъ хода идей. Вообще курсы Клейна рассчитаны на хорошо подготовленныхъ слушателей.

Я не буду подробно описывать другаго курса пр. Клейна, котораго заглавіе достаточно показываетъ, что въ этомъ курсѣ, изслѣдуя функціи, начиная съ элементарныхъ и до Абелевыхъ

интеграловъ, онъ также придерживается методовъ Клебша и Римана; но отмѣчу только то, что показалось мнѣ новымъ въ этомъ курсѣ. Первое — это переходъ отъ алгебраической кривой въ пространствѣ  $n$  измѣреній, отъ которой зависитъ Абелевъ интеграль по Клебшу (распространеніе на  $n$  измѣреній принадлежитъ его ученикамъ Клейну и Нётеру) къ Римановой поверхности чрезъ постепенное проектированіе въ пространство непосредственно низшаго числа измѣреній изъ центра, взятаго на кривой. Объ этомъ лучше всего дастъ понятіе слѣдующій примѣръ, взятый изъ курса Клейна: пусть дана кривая четвертаго порядка въ пространствѣ трехъ измѣреній: взявъ за центръ проэкцій точку на кривой, проводимъ изъ нея прямыя чрезъ всѣ точки данной кривой до пересѣченія съ какою-нибудь плоскостью, непроходящею чрезъ центръ проэкцій: въ пересѣченіи получимъ рядъ точекъ, образующихъ кривую третьяго порядка (дѣйствительно, если мы пересѣчемъ полученную кривую какою-нибудь прямою въ плоскости проэкцій и чрезъ эту прямую и центръ проэкцій проведемъ новую плоскость, то эта послѣдняя пересѣчетъ данную кривую 4-го порядка еще только въ трехъ точкахъ, и если мы эти точки соединимъ съ центромъ проэкцій прямыми, то эти послѣднія опредѣлятъ точки пересѣченія кривой проэкціи съ сѣкущею прямою, которыхъ будетъ такимъ образомъ три, откуда и слѣдуетъ сказанное). Если теперь возьмемъ точку на этой кривой 3. порядка и будемъ проводить изъ нея прямыя къ прочимъ точкамъ кривой и опредѣлимъ точки ихъ пересѣченія съ какою-либо прямою въ той-же плоскости, не проходящею чрезъ этотъ второй центръ проэкцій, то будемъ имѣть точки этой прямой, соотвѣтственные въ силу обоихъ проектированій точками данной кривой 4. порядка въ пространствѣ трехъ измѣреній. При этомъ каждой точкѣ кривой 4. порядка будетъ въ силу обоихъ проектированій отвѣчать одна точка прямой, но, наоборотъ, каждой точкѣ этой прямой линіи

будутъ отвѣчать уже двѣ точки кривой третьяго порядка (а слѣд. и данной четвертаго), потому что каждая прямая, соединяющая точку прямой со вторымъ центромъ проэкцій, встрѣтитъ кривую 3. порядка еще въ двухъ точкахъ; такъ что прямыя соединяющія точки кривой 3. порядка съ центромъ проэкціи будутъ совпадать по двѣ, откуда и слѣдуетъ сказанное. Функція отъ координатъ точекъ данной кривой въ каждой точкѣ послѣдней прямой будетъ имѣть, слѣдовательно, по два значенія, которыя сдѣлаются равными только въ точкахъ, отвѣчающихъ касательнымъ изъ центра проэкцій къ точкамъ кривой 3. порядка. Такъ какъ изъ точки на кривой 3. порядка можно провести четыре касательныя къ ней-же, то мы будемъ имѣть на нашей дважды покрытой значеніями функціи прямой четыре точки развѣтвленія функціи. Если теперь перестанемъ ограничиваться вещественными значеніями, а примемъ въ разсмотрѣніе комплексныя, то наша дважды покрытая значеніями функціи прямая обратится въ двулиственную Риманову плоскость съ четырьмя винтовыми точками (*Windungspunkte*), которую Риманъ построилъ для однозначнаго представленія функцій, зависящихъ отъ квадратнаго корня изъ полинома четвертой степени. Еще Нейманъ показаль — въ своихъ «*Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale*». Leipzig. Teubner. 1865, — что чрезъ непрерывное измѣненіе можно сей-часъ упомянутую Риманову поверхность, послѣ предварительнаго обращенія въ двулиственную сферу, превратить въ кольцевую поверхность. Другой пунктъ въ разсматриваемомъ курсѣ Клейна, который я желаю отмѣтить, это есть именно распространеніе этого результата на какую угодно Риманову поверхность, чрезъ что получается *нормальная* Риманова поверхность, имѣющая видъ шара съ ручками (наподобіе ручекъ торговыхъ вѣсовыхъ гирь). Всякая функція принимающая одно только значеніе въ каждой точкѣ такой поверхности будетъ на ней однозначною. На такой поверхности

(если ручекъ  $p$ ) можно провести  $2p$  системъ кривыхъ, которыя нельзя стянуть въ одну точку: однѣ образуютъ меридіаны ручки (соотвѣтственно меридіанамъ кольца), другія — параллели. Всякій другой путь изъ одной точки въ другую можетъ быть чрезъ непрерывное измѣненіе приведенъ къ пути по кратчайшей на поверхности линіи + рядъ полныхъ путей вокругъ меридіановъ и параллелей ручекъ. Интеграль отъ однозначной и конечной функціи на такой поверхности будетъ нуль по пути, который можно стянуть въ одну точку, и будетъ отличенъ отъ нуля по пути, который нельзя стянуть въ одну точку. Такимъ образомъ меридіанъ каждой ручки  $H_i$  даетъ интеграль  $A_i$ , параллель другой  $B_i$ , которыя будутъ періодами интеграла, такъ какъ всѣ интегралы, взятые по различнымъ путямъ изъ одной точки въ другую, будутъ различаться на линейныя функціи съ цѣлыми коэффициентами отъ этихъ величинъ  $A_i$  и  $B_i$ .

Третій пунктъ, который я желаю отмѣтить, заключаетъ въ себѣ отвѣтъ на вопросъ: какимъ образомъ Риманъ пришелъ къ своей теоріи алгебраическихъ функцій и ихъ интеграловъ. Клейнъ полагаетъ, что онъ былъ приведенъ къ ней чрезъ разсмотрѣніе физическихъ вопросовъ, именно *установившихся теченій на плоскости* (Stationäre Strömungen in der Ebene). Изъ этой части курса пр. Клейна вышла его брошюра: «Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale. Eine Ergänzung der gewöhnlichen Darstellungen». Leipzig. Teubner. 1882.

Хотя такимъ образомъ чрезъ отчетъ объ этомъ курсѣ пр. Клейна я подошелъ къ главному предмету моихъ занятій, именно Абелевымъ интеграламъ, я позволю себѣ еще одно отступленіе, чтобы покончить съ предметами, имѣвшими для меня второстепенное значеніе. Въ семинарѣ я бѣгло ознакомился также и съ лекціями Вейерштрасса по теоріи эллиптическихъ функцій. Въ нихъ самое интересное — это подходъ къ эллиптическимъ функціямъ. Вейерштрассъ къ нимъ приходитъ чрезъ рѣшеніе такой задачи:

найти всѣ однозначныя функціи одной независимой переменнѣй, для которыхъ имѣетъ мѣсто теорема сложенія; потомъ онъ показываетъ, что функція  $p(u)$ , къ которой приводитъ разсмотрѣніе интеграловъ отъ раціональной функціи отъ квадратнаго корня изъ полинома 4 степени, есть та-же самая, которая рѣшаетъ его задачу. Приведеніе интеграловъ къ его, Вейерштрасса, канонической формѣ я нашелъ во второй части его курса, посвященной приложенію эллиптическихъ функцій. Это приведеніе изложено въ брошюрѣ Миттагъ-Леффлера, цитированной мною въ вышеприведенной статьѣ моей, посланной въ математическое общество. Къ сожалѣнію, эта брошюра написана на шведскомъ языкѣ и, безъ знанія этого языка, только съ большимъ трудомъ одолѣвается при помощи лексикона. Къ этимъ лекціямъ Вейерштрасса я еще разъ надѣюсь вернуться въ Берлинѣ. — Перехожу теперь къ Абелевымъ интеграламъ.

Теорія Абелевыхъ интеграловъ началась съ знаменитой теоремы Абеля. Первымъ, кто послѣ Абеля приступилъ къ ея разработкѣ, былъ Якоби, сосредоточившій свое вниманіе на спеціальномъ классѣ Абелевыхъ интеграловъ, нынѣ называемыхъ ультра- или гиперэллиптическими, которыя зависятъ отъ квадратнаго корня изъ полинома какой угодно степени. Онъ подробно изслѣдовалъ Абелеву теорему для этихъ интеграловъ всѣхъ трехъ родовъ, теорему о переменнѣ параметра съ аргументомъ для интеграловъ 3-го рода; показалъ многоперіодичность этихъ интеграловъ и первый правильнымъ образомъ поставилъ вопросъ объ обращеніи Абелевыхъ интеграловъ, отчего эта задача объ обращеніи Абелевыхъ интеграловъ и называется теперь Якобіевою.

Якоби однако не рѣшилъ этой задачи: первое рѣшеніе ея принадлежитъ Göpel'ю и Rosenhain'у, которые получили его чрезъ обобщеніе Якобіевской функціи  $\vartheta(u)$ : Якоби показалъ — какимъ образомъ изъ свойствъ ея можно вывести дифференціальное уравненіе эллиптическихъ функцій, которыя представляются част-

нымъ двухъ различныхъ  $\vartheta(u)$ . Göpel и Rosenhain, принявъ въ разсмотрѣніе ряды  $\vartheta(u, v)$ , составленные по тому-же закону, но уже двойные и зависящіе отъ двухъ аргументовъ —  $u$  и  $v$ , вывели изъ ихъ свойствъ частныя дифференціальныя уравненія для функцій, представляемыхъ частнымъ двухъ такихъ  $\vartheta(u, v)$ , и такимъ образомъ пришли къ дифференціальнымъ уравненіямъ Якобіевой задачи (Методъ Rosenhain'a весьма хорошо очерченъ въ докторской диссертациі К. А. Поссе подъ заглавіемъ — «О функціяхъ  $\vartheta$  отъ двухъ переменныхъ и о задачѣ Якоби.» Спб. 1882). Съ-тѣхъ-поръ и понынѣ теорія  $\vartheta$ -функцій многихъ переменныхъ продолжаетъ разрабатываться главнымъ образомъ въ Германіи, и хотя трудами Римана, Фукса, Томэ, Прима, Крацера, Вебера, Нётера, Вейерштрасса и Шотки много подвинута впередъ, однако все-таки съ этой стороны подойти къ рѣшенію Якобіевой задачи до-сихъ-поръ удалось только для непосредственно слѣдующаго за рангомъ 2 (по Вейерштрассу; Geschlecht Клебша) которымъ ограничились Göpel и Rosenhain, именно Веберу въ его «Theorie der Abelschen Functionen vom Geschlecht 3. Berlin, 1876, и Шотки (Schottky) въ его — «Abriss einer Theorie der Abelschen Functionen von drei Variabeln.» Leipzig. 1880, для ранга 3. Трудности такого рѣшенія Якобіевской задачи, какъ намъ теперь кажется — послѣ предстоящаго мнѣ болѣе глубокаго изученія этого способа можетъ быть взглядъ мой и измѣнится, — не принципиальнаго свойства, а такъ-сказать — количественнаго; вслѣдствіе того, что съ увеличеніемъ ранга увеличивается гораздо быстрѣе число самихъ  $\vartheta$ , различающихся характеристиками, и число соотношеній между ними, увеличивается и монотонная работа разбора этихъ отношеній такъ, что остается только подождать, чтобы явился ученый, у котораго хватило бы мужества приняться за эту скучную работу и умѣнья представить результаты ея въ удобообозримой формѣ. Это было бы весьма желательно — хотя такой способъ рѣшенія задачи Якоби, какъ непрямой, намъ и

кажется менѣе естественнымъ, чѣмъ переходъ отъ интеграловъ къ  $\theta$ , — потому что, когда въ наукѣ будутъ существовать оба способа рѣшенія задачи Якоби — прямой и обратный, то эта фундаментальная часть теоріи Абелевыхъ интеграловъ получитъ округленность, причемъ лучше обнаружится внутренняя глубокая связь между обѣими трансцендентными, подобно тому, что мы имѣемъ теперь въ теоріи эллиптическихъ функцій.

Первое прямое рѣшеніе Якобіевской задачи принадлежит Вейерштрассу, но тѣ результаты, которые онъ сообщилъ безъ доказательствъ въ 47 т., а также и тотъ неоконченный мемуаръ, который помѣщенъ въ 52 т. журнала Креля, способны больше возбудить интересъ къ его теоріи, чѣмъ дать о ней удовлетворительное понятіе; поэтому его теорія только медленно распространялась болѣе чрезъ его учениковъ, и неудивительно, если появившаяся въ томъ-же журналѣ 54 т. Риманова «*Theorie der Abelschen Functionen*» выдвинулась болѣе впередъ, отодвинувъ Вейерштрассовскую теорію на второй планъ. Риманова теорія нашла многихъ адептовъ и вызвала много работъ, принятыхъ или въ видахъ примѣненія его теоріи къ частнымъ случаямъ (Примъ, Нейманъ къ гиперэллиптическимъ, Томэ къ интеграламъ, зависящимъ отъ кубич. корня) или къ разъясненію или дополненію того или другаго пункта теоріи (Рохъ, Веберъ, Нөтеръ, Клейнъ). Принципъ Дирихле, на которомъ Риманъ основалъ свою теорію, былъ подвергнутъ сомнѣнію и вызвалъ рядъ изслѣдованій — (Нейманъ, Шварцъ, Веберъ). Что же касается до задачи обращенія Абелевыхъ интеграловъ, то оно въ сущности эмпирическое, — употребляя выраженіе Клейна; Риманъ беретъ  $\Theta$ -функцію готовою и изъ нея строитъ функціи, которыя были бы однозначны на подлежащей многосвязной поверхности, получившей названіе отъ его имени, и слѣд. алгебраическія, развѣтвленіе которыхъ опредѣляется этою поверхностію.

Это тотъ пунктъ Римановой теоріи, который не удовлетворилъ ни Неймана, прекрасно въ своихъ «*Vorlesungen über Riemann's*

Theorie der Abelsch. Integr. » Leipzig. 1865 — популяризовавшего Риманову теорию, ни Клебша.

Клебша не удовлетворялъ, какъ видно изъ его предисловія къ его и Гордана книгѣ — «Theorie der Abelschen Integrale.» Leipzig, Teubner. 1866, также и синтетическій характеръ построения функцій, благодаря именно которому, по его мнѣнію, Риманова теорія распространялась лишь въ тѣсномъ кругу — скажу — отборныхъ математиковъ, представляя громадныя трудности для уразумѣнія. Этого мнѣнія нельзя не раздѣлять: дѣйствительно, лишь когда читатель Римана уже знакомъ изъ другихъ источниковъ съ Абелевыми интегралами, тогда только понятны для него *raison d'être* тѣхъ условій, которыми опредѣляетъ функцію Риманъ на основаніи принципа Дирихле. Не менѣе поражаетъ сперва и то, что въ его «Theorie der Abelschen Integrale» появляются прежде интегралы отъ алгебраическихъ функцій, а потомъ сами алгебраическія функціи. Теперь, послѣ выхода упомянутой мною выше книги Клейна, мы имѣемъ объясненіе весьма правдоподобное сформированія Римановой теоріи; но все же и послѣ этого кто же можетъ считать такой путь естественнымъ?... Риманова теорія Абелевыхъ интеграловъ навсегда останется блестящимъ памятникомъ его гениальности, но должна современемъ уступить господство въ наукѣ другой болѣе простой, естественной, и, кто знаетъ, можетъ быть той самой, которую она сперва какъ-бы оттѣснила на второй планъ, — Вейерштрассовской, на-встрѣчу которой, въ лицѣ Нётера, идетъ теперь и третья школа — Клебшевская (первою я считаю — Гёпелъ-Розенгайновскую, второю Риманову, четвертою же Вейерштрассовскую). Клебшъ и Горданъ, вслѣдствіе сказанной причины, предпочли основать теорию Абелевыхъ интеграловъ на другихъ началахъ: они, какъ извѣстно, связали теорию Абелевыхъ интеграловъ съ геометрией, толкуя, какъ уравненіе плоской кривой, уравненіе, опредѣляющее ирраціональность, входящую

въ интеграль. Такое соединеніе было плодотворно для обѣихъ наукъ: Абелевы интегралы каждаго изъ трехъ родовъ получили отчетливое опредѣленіе, теорема Абеля и предложеніе о перемѣнѣ параметра съ аргументомъ въ интегралахъ 3. рода ясное выраженіе; послѣ чего Клебшъ и Горданъ могли основать свою теорію функцій  $T_{\xi\eta}(x)$ , зависящей отъ интеграловъ 3. рода и функцій  $U$  и  $V$ , зависящихъ отъ этой функціи  $T_{\xi\eta}(x)$ , которыя служатъ, такъ-сказать, мостомъ, по которому совершается переходъ отъ Абелевыхъ интеграловъ къ  $\Theta$ -функціямъ, а чрезъ посредство Абелевой теоремы они составляютъ и уравненіе, рѣшающее задачу Якоби, — уравненіе, котораго коэффициенты зависятъ отъ  $T_{\xi\eta}(x)$  и слѣд. отъ  $\Theta$ .

Глава, посвященная теоріи функціи  $T_{\xi\eta}(x)$ , самая трудная въ книгѣ Клебша и Гордана, но въ то-же время и самая важная: она даетъ то, чего не доставало Риману. Тѣмъ не менѣе, по причинѣ сложности теоріи этихъ функцій, какъ Бріо въ своей «*Théorie de fonctions Abeliennes.*» Paris. 1879, такъ и Линдеманъ въ своей обработкѣ лекцій Клебша по геометріи предпочли слѣдовать, съ этого пункта начиная, Риману.

Я сказалъ, что установленная Клебшемъ и Горданомъ связь Абелевыхъ интеграловъ съ геометріей была полезна для обѣихъ наукъ: геометріи она дала понятіе о родѣ (дефектъ—по Cayley) плоскихъ кривыхъ, рядъ предложеній касательно пересѣченія кривыхъ между собою (Schnittpunkt-Sätze), понятіе о сопряженныхъ кривыхъ (adjungirte Curven), теорію преобразованія кривыхъ. Изъ числа относящихся сюда работъ я отмѣчу рядъ работъ Нётера, начатыхъ совмѣстно съ Брилемъ и продолжаемыхъ теперь имъ однимъ; помѣщены онѣ въ *Mathematische Annalen* и въ «*Sitzungsberichten der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen*». Въ этихъ работахъ онъ стремится къ тому, чтобы дать предложеніямъ, открытымъ съ помощію теоріи Абелевыхъ интеграловъ, но алгебраическаго характера, и доказа-

тельства алгебраическія — стремленіе, заслуживающее полной симпатіи, — и приходит къ весьма замѣчательному результату (въ 23 т. *Mathem. An.*), именно — къ раціональному опредѣленію, т. е. при помощи раціональных дѣйствій, такихъ фундаментальныхъ вещей для теоріи Абелевыхъ интеграловъ, какъ рангъ ихъ\* и сопряженные функціи  $\varphi$  (геометрически *adjungirte Curven*  $n-3$  порядка, если  $n$  степень уравненія основной кривой), которыя фигурируютъ въ числителяхъ дифференціаловъ Абелевыхъ интеграловъ перваго рода. Раньше найденъ былъ имъ другой замѣчательный результатъ въ статьѣ «*Invariante Darstellung der algebraischen Functionen.*» *Math. An. Bd. 17*, на который указываетъ самое заглавіе: въ этой статьѣ онъ показываетъ — какимъ образомъ можно разныя алгебраическія функціи выразить чрезъ функціи  $\varphi$ , частное которыхъ не измѣняется, какъ показали еще Клебшъ и Горданъ, отъ раціональныхъ преобразованій, т. е. при раціональномъ преобразованіи уравненія, опредѣляющаго ирраціональность, входящую въ Абелевъ интегралъ, переходитъ въ частное такихъ-же функцій, примѣнительно къ преобразованному уравненію. Яснѣе всего важное значеніе этихъ функцій  $\varphi$  для теоріи Абелевыхъ интеграловъ отмѣтилъ Веберъ въ своей *Theorie der Abelschen Functionen vom Geschlechte 3. Berlin. 1876*. Впрочемъ, это видно уже и изъ работы Римана о томъ-же предметѣ, появившейся въ первый разъ уже послѣ его смерти въ собраніи его сочиненій, изданныхъ подъ редакціей того-же Вебера. Возвращаясь къ Нöтеру, должны замѣтить, что онъ принадлежитъ къ той школѣ математиковъ, о которой я упоминалъ выше, которые не отдѣляютъ алгебры отъ геометріи; вслѣдствіе этого у него не только форма предложеній геометрическая, но часто и доказательства; это дѣлаетъ изученіе работъ его затруднительнымъ для тѣхъ, кто не слѣ-

\* Другой способъ раціональнаго опредѣленія ранга предложенъ Раффу въ томъ-же томѣ *Mathem. An.*

диль за нѣмецкою литературою съ самаго того момента, когда этими вопросами начали заниматься въ Германіи: приходится изучать массу работъ, неимѣющихъ прямого отношенія къ занимающему вопросу, для того, чтобы понять то подъ-часъ не-многое, что собственно интересуеть. По этой причинѣ желатель-но было бы тѣхъ-же результатовъ добиться чисто алгебраиче-скими средствами: это навѣрно возможно, потому что въ осно-вѣ всѣхъ этихъ предложеній лежитъ опредѣленіе кривыхъ урав-неніями; играетъ роль число коэффициентовъ въ этомъ уравне-ніи. Касательно работы, помѣщенной въ 23 т. *Annal.* о ра-ціональномъ опредѣленіи рода кривыхъ и сопряженныхъ кривыхъ, можно замѣтить, что желательно было бы при опредѣленіи рода кривыхъ и сопряженныхъ кривыхъ обходиться безъ раціональ-наго преобразованія данной кривой въ другую, которое употреб-ляетъ Нотеръ въ случаѣ, когда въ кратной точкѣ нѣкоторыя изъ вѣтвей кривой касаются одна другой; это вноситъ усложненіе въ рѣшеніе, заставляя опредѣленіе особенныхъ точекъ зависѣть отъ преобразованія, въ которомъ эти самыя точки принимаются за фундаментальныя. Это, какъ намъ кажется, тоже возможно. — Въ трехъ послѣднихъ своихъ замѣткахъ, помѣщенныхъ въ отчетахъ эрлангенскаго физико-медицинскаго общества за 1883 и 1884 годы, онъ переходитъ уже прямо къ самимъ Абелевымъ интеграламъ и показываетъ въ первой — какимъ образомъ, оставаясь, такъ-сказать, на почвѣ Клебша и Гордана, выполняется приведеніе дифференціальныхъ выраженій къ нормальной формѣ, въ послѣд-нихъ двухъ — какимъ образомъ, опять таки не покидая той-же почвы, можно получить то дифференціальное тождество, которое по интегрированіи даетъ и теорему о перемѣнѣ параметра съ аргументомъ въ интегралѣ третьяго рода, интеграль второго рода обращающійся въ какой-либо точкѣ въ  $\infty^1$  приводитъ къ алгебраической функціи, обращающейся въ  $\infty^1$  въ той-же точкѣ + линейная функція отъ интеграловъ второго рода, обращающихся

въ  $\infty^1$  въ опредѣленныхъ, разъ навсегда выбранныхъ, точкахъ; чрезъ посредство Абелевой теоремы наконецъ приводитъ къ функциямъ  $Al(u, u_2, \dots, u_p)$  Вейерштрасса, и упрощаетъ теорію самихъ Клебшевскихъ функцій, о которыхъ упоминалось выше. То обстоятельство, что Нöтеръ такъ просто и естественно, безъ всякаго *tour de force*, оставаясь вѣрнымъ аналитико-геометрическимъ приемамъ Клебша и Гордана, приходитъ къ результатамъ Вейерштрасса, подготовляющимъ обращеніе Абелевыхъ интеграловъ, фактъ въ высшей степени знаменательный, подтверждающій мое мнѣніе, что Вейерштрассовскій путь отъ Абелевыхъ интеграловъ къ  $\Theta$ -функціи и есть настоящій, что его теорія окончательно сдѣлается господствующею.

Говоря это, я имѣю въ-виду самую теорію, а не его способы доказательствъ. Мнѣ не разъ случалось замѣчать, что, говоря про теорію Абелевыхъ интеграловъ Вейерштрасса, въ своемъ представленіи не отдѣляютъ теоріи отъ метода, — отчего сущность теоріи представляется смутною, между тѣмъ какъ въ дѣйствительности въ существенныхъ пунктахъ своихъ его теорія, какъ мы видимъ теперь послѣ работъ Нöтера, о которыхъ только-что была рѣчь, можетъ быть выведена и другими способами. Въ то время какъ Коши и особенно Риманъ опредѣляли функцію признаками разрыва и непрерывности, а не возможностью быть представленной тѣмъ или другимъ аналитическимъ выраженіемъ, выдвинувъ, напротивъ, зависимость послѣдняго отъ перваго, — Вейерштрассъ аналитическую функцію опредѣляетъ какъ такую, которая способна разлагаться въ рядъ по степенямъ независимой переменнѣй, сходящійся въ извѣстной области ея значенія, и это опредѣленіе, равно какъ вытекающій изъ него приемъ характеризовать функцію въ смежности различныхъ значеній независимыхъ переменныхъ формою ея разложенія въ рядъ, и на этомъ основанные способы доказательствъ различныхъ предложеній проходятъ чрезъ весь циклъ читаемыхъ проф. Вейерштрассомъ кур-

совъ, а именно: введеніе въ общую теорію аналитическихъ функцій, теорія эллиптическихъ функцій, теорія гиперэллиптическихъ интеграловъ, Абелевыхъ интеграловъ и вариационное исчисленіе. Такъ, въ курсахъ гиперэллиптическихъ и Абелевыхъ интеграловъ онъ постоянно, вмѣсто переменныхъ  $x$  и  $y$ , связанныхъ алгебраическимъ уравненіемъ, опредѣляющимъ ирраціональность интеграловъ, употребляетъ безконечные ряды, которыми выражается эта пара переменныхъ чрезъ третью вспомогательную переменную  $t$ , ряды различные, разумѣется, для различныхъ областей. Теорія Абелевыхъ интеграловъ представляетъ обобщеніе его теоріи гиперэллиптическихъ, составляющихъ лишь частный случай первыхъ, къ которому относятся первыя работы Вейерштрасса (помѣщенные: первая, подъ заглавіемъ — «Beitrag zur Theorie der Abelschen Integrale» въ Braunsberger-Program 1843; другія двѣ — «Zur Theorie der Abelschen Functionen» въ 47 т. журнала Крелля, и «Theorie der Abelschen Functionen» въ 52 т.); поэтому достаточно, такъ-какъ и безъ того мой отчетъ вопреки желанію вышелъ длиннымъ, ограничиться указаніемъ существенныхъ пунктовъ одного изъ нихъ, и я останавливаю свой выборъ на теоріи Абелевыхъ интеграловъ, какъ болѣе общей и въ которой впервые встрѣчается понятіе ранга (Rang). Понятіе это Вейерштрассъ опредѣляетъ такою теоремою: всякому неприводимому алгебраическому уравненію  $f(x, y) = 0$  принадлежитъ совершенно опредѣленное цѣлое число  $\rho$ , положительное или равное нулю, такого свойства, что всегда возможно составить раціональную функцію  $F(xy; x'y')$  четырехъ величинъ  $x, y; x', y'$ ; которая, рассматриваемая какъ функція  $(xy)$ , обращается въ  $\infty^1$  въ  $(x'y')$  и кромѣ того еще только въ  $\rho$  другихъ, различныхъ между собою и неизмѣнныхъ мѣстахъ  $a_1 b_1, a_2 b_2 \dots a_\rho b_\rho$ , тогда какъ такой функціи, которая обращалась бы въ  $\infty^1$  только въ этихъ послѣднихъ мѣстахъ, не существуетъ. Отсюда, какъ слѣдствіе, вытекаетъ неизмѣнность этого числа для всѣхъ алгебраическихъ уравненій,

составляющихъ классъ, т. е. получаемыхъ одно изъ другого чрезъ раціональное преобразование. Функція, упомянутая въ этой теоремѣ, опредѣленная дополнительными условіями обращаться въ нуль въ  $(x_0, y_0)$  и имѣть при  $(x - x')^{-1}$  въ разложеніи по степенямъ  $(x - x')$  коэффициентомъ единицу, называется имъ «главною» по той роли, которую она играетъ въ его теоріи. Это интегрантъ 3. рода; изъ этой функціи при помощи разложенія въ ряды по степенямъ вспомогательной переменной  $t$  онъ получаетъ интегранды 1. и 2. рода и опредѣляетъ ихъ свойства. Изъ этой же функціи, дифференцируя ее по  $x$  и вычитая результатъ получаемый отсюда чрезъ перемѣну ролей  $xu$  и  $x'y'$ , получаетъ дифференціальное тождество, чрезъ интегрированіе котораго по  $x$ , или  $x'$ , или по обоимъ, получается рядъ важныхъ результатовъ: отсюда онъ получаетъ прежде всего періодичность интеграловъ и соотношенія между періодами интеграловъ перваго и втораго рода; выраженіе интеграла втораго рода, обращающагося въ  $\infty^1$  въ  $x'y'$ , чрезъ алгебраическія функціи и интегралы, обращающіеся въ  $\infty^1$  въ неизмѣнныхъ точкахъ  $a_1, b_1, \dots, a_p, b_p$ ; предложеніе о перемѣнѣ параметра съ аргументомъ въ интегралахъ 3. рода, выраженіе интеграловъ всѣхъ трехъ родовъ чрезъ такъ-называемыя имъ Primfunctionen (по аналогіи съ первыми числами въ арифметикѣ), чрезъ которыя могутъ быть выражены также и всѣ раціональныя функціи отъ  $x$  и  $y$ , связанныхъ уравненіемъ, опредѣляющимъ ирраціональность, входящую въ рассматриваемые Абелевы интегралы, — откуда сейчасъ слѣдуетъ Абелева теорема. Эти Primfunctionen особенныя трансцендентныя двухъ родовъ: одни никогда не обращаются въ нуль; другія обращаются только въ одной точкѣ въ нуль перваго порядка и въ другой въ  $\infty^1$ ; но кромѣ того какъ тѣ, такъ и другія имѣютъ «существенно особенныя точки» въ вышеупомянутыхъ мѣстахъ  $a_1, b_1, \dots, a_p, b_p$ . Интегралы третьаго рода по сомкнутой для первыхъ и изъ одной

точки въ другую для послѣднихъ, разсматриваемые какъ функціи параметра, суть логариемы этихъ Primfunctionen. Изъ нихъ же при помощи Абелевой теоремы Вейерштрассъ составляетъ функціи, частныя производныя которыхъ по переменнымъ независимымъ Якобіевой задачи выражаются чрезъ нѣкоторые интегралы второго рода. Отсюда выводится функціональное уравненіе обобщенной  $\Theta$ -функціи, и такимъ образомъ съ этого пункта начинается уже теорія  $\Theta$ -функцій. Въ силу связи примфункцій съ одной стороны съ интегралами, съ другой — съ  $\Theta$ , получаются легко выраженія чрезъ послѣднія какъ интеграловъ 2. и 3. рода, такъ и раціональныхъ симметрическихъ функцій отъ паръ  $x_\alpha$ ,  $y_\alpha$  — верхнихъ предѣловъ интеграловъ перваго рода Якобіевой задачи, т. е. такъ-называемыхъ Абелевыхъ функцій.

Было у меня сперва намѣреніе слушать также лекціи Майера по интегрированію уравненій съ частными производными, но занятія мои въ библіотекѣ семинара поглотили все время, такъ что я отъ этого намѣренія отказался; впоследствии же узналъ, что самый курсъ не состоялся по недостатку слушателей.

На зимній семестръ объявленные въ Лейпцигѣ курсы мнѣ не были нужны. Чтенія по гиперэллиптическимъ и Абелевымъ интеграламъ на настоящій зимній семестръ объявлены слѣдующія:

*Jena. Pr. Frege. Abelsche Integrale. 3 Vorl.*

*Königsberg. Pr. Lindemann. Theorie der Abelschen Functionen. 4 Vorles.*

*Rostock. Pr. D. Krause. Einleitung in die Theorie d. hyperelliptischen Functionen. 2 Vorl.*

*Strasburg. Pr. Cristoffel. Theorie d. Abelschen Functionen. 4 Vorlesungen.*

Наконецъ, какъ я слышалъ отъ приватъ-доцента берлинскаго университета д-ра Рунге, только-что вернувшася изъ Стокгольма, съ февраля мѣсяца начнегъ читать объ Абелевыхъ интегралахъ (по Вейерштрассу, конечно) приватъ-доцентъ тамошняго

университета д-ръ С. Ковалевская, теперь съ успѣхомъ тамъ читающая дифференціальное и интегральное исчисленіе.

Программъ здѣсь не объявляютъ, а потому о томъ — каковъ будетъ курсъ, судить можно только по прежнимъ работамъ объявившихъ чтенія; такія данныя имѣются у меня только относительно пр. Линдемана, принадлежащаго къ Клебшевой школѣ; должно полагать, что его курсъ будетъ въ родѣ того, что представляетъ отдѣлъ объ Абелевыхъ интегралахъ въ изданной имъ обработкѣ лекцій Клебша.

Такъ-какъ меня въ настоящее время занимаетъ болѣе всего Вейерштрассовская теорія, то я предпочелъ по приѣздѣ (31-го сент. н. стили) въ Берлинъ остаться здѣсь, чтобы въ случаѣ надобности обратиться за разъясненіями и указаніями къ самому Вейерштрассу или его ученикамъ, которыхъ здѣсь много; кромѣ того здѣсь скорѣе можно получить и разныя диссертациі учениковъ его, въ которыхъ разрабатывались разные частные вопросы изъ теоріи Абелевыхъ интеграловъ, которымъ не было мѣста въ его лекціяхъ. Что-же касается лекцій, то я намѣревался слушать лекціи Кронекера по высшей алгебрѣ, Вейерштрасса по введенію въ общую теорію аналитическихъ функцій и Фукса (перешелъ изъ Гейдельберга; избранъ также въ академию) объ интегрированіи дифференціальныхъ уравненій. Однако эти курсы пока очень элементарны; теорію же свою дифференціальныхъ уравненій пр. Фуксъ будетъ излагать въ лѣтній семестръ. Занятія въ семинарѣ еще не начались; заниматься будутъ пр. Вейерштрассъ, Кронекеръ и Фуксъ. Поэтому занятія мои здѣсь будутъ состоять главнымъ образомъ въ разработкѣ и уясненіи разныхъ частныхъ теорій Абелевыхъ интеграловъ.

Берлинъ.

6  
18 ноября 1884 г.

— 001 —

ОТДѢЛЕНІЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ЧАСТИ  
ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ.

*М. А. Тихомандрицкаго.*

~~~~~

1. Способъ Остроградскаго для отдѣленія алгебраической части интеграловъ отъ раціональныхъ дробей, примѣненный Алексѣевымъ въ его «Интегральномъ исчисленіи» къ интеграламъ отъ выраженій, содержащихъ квадратный корень изъ полинома 2. степени, распространяется и на гиперэллиптическіе интегралы, т. е. на интегралы отъ выраженій, содержащихъ корень квадратный изъ полинома какой угодно степени. Показать это есть цѣль настоящей замѣтки.

2. Имѣя въ виду сдѣланное уже самимъ Остроградскимъ, мы можемъ ограничиться разсмотрѣніемъ интеграловъ вида:

$$\int \Phi(x) \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}, \quad (1)$$

гдѣ  $\Phi(x)$  раціональная функція  $x$ , такъ какъ общій интегралъ отъ выраженія, зависящаго отъ квадратнаго корня изъ полинома  $R(x)$  какой угодно степени, будетъ отъ разсматриваемаго отличаться на интегралъ отъ раціональной дроби. Функція  $\Phi(x)$  вообще неправильная дробь; исключая цѣлую часть, мы будемъ имѣть:

$$\Phi(x) = f(x) + \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}, \quad (2)$$

гдѣ  $f(x)$  цѣлая функція, а  $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$  правильная дробь, такъ что, означая степень полинома по Абелю буквою  $\delta$ , поставленною предъ знакомъ полинома, будемъ имѣть:

$$\delta\varphi(x) < \delta\psi(x). \quad (3)$$

На основаніи (2) нашъ интеграль (1) приведется къ суммѣ двухъ такихъ:

$$\int \frac{f(x)dx}{2\sqrt{R(x)}},$$

$$\int \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}},$$

изъ которыхъ каждый мы рассмотримъ отдѣльно, начиная съ перваго.

3. Всегда можно найти такой полиномъ  $K(x)$  степени не высшей  $f(x)$ , что по придачѣ его къ  $f(x)$  мы получимъ интеграль

$$\int \frac{f(x) + K(x)}{2\sqrt{R(x)}} dx, \quad (1)$$

который будетъ интегрироваться алгебраически, слѣдовательно будетъ вида:

$$\int \frac{f(x) + K(x)}{2\sqrt{R(x)}} = X\sqrt{R(x)} + C, \quad (2)$$

гдѣ  $X$  цѣлый полиномъ\*. Дѣйствительно, дифференцируя его и умножая затѣмъ на  $2\sqrt{R(x)}$ , получимъ:

$$f(x) + K(x) = X' \cdot 2R(x) + X \cdot R'(x). \quad (3)$$

\* Общая форма функции отъ  $x$  и  $\sqrt{R(x)}$  будетъ конечно такая:

$$\Theta(x) + \Phi(x)\sqrt{R(x)},$$

гдѣ  $\Theta(x)$  и  $\Phi(x)$  рациональныя функции; но тогда, продифференцировавъ равенство:

$$\int \frac{f(x) + K(x)}{2\sqrt{R(x)}} dx = \Theta(x) + \Phi(x)\sqrt{R(x)},$$

мы получили бы по умноженіи результата на  $2\sqrt{R(x)}$  слѣдующее:

$$f(x) + K(x) = \Theta'(x) 2\sqrt{R(x)} + \Phi'(x) 2R(x) + \Phi(x) R'(x), \quad (a)$$

откуда слѣдуетъ, такъ какъ  $\sqrt{R(x)}$  разсматривается всегда неизвлекаемый, что

$$\Theta'(x) = 0,$$

т. е.

$$\Theta(x) = C.$$

Что  $\Phi(x)$  должна быть полиномъ, а не дробная функция, въ этомъ такъ убеждаемся. Еслибы  $\Phi(x)$  была дробная функция, то по разложеніи на частныя дроби она представилась бы суммою членовъ вида  $\frac{A_\mu}{(x-\alpha)^\mu}$ ; если  $m$  наибольшее значеніе  $\mu$ , то во второй части равенства (a) встрѣтится членъ

$$\frac{-A_m m 2R(\alpha)}{(x-\alpha)^{m+1}},$$

которому подобнаго не будетъ, но который долженъ исчезнуть, такъ какъ первая часть равенства (a) есть цѣлая функция; слѣдовательно если  $A_m \neq 0$ , то должно быть  $R(\alpha) = 0$ , т. е.  $\alpha$  должно быть корнемъ полинома  $R(x)$ ; но въ такомъ случаѣ старшимъ членомъ во второй части (a) будетъ такой членъ:

$$\frac{-m A_m 2R'(\alpha) + A_m R'(\alpha)}{(x-\alpha)^m} = \frac{A_m R'(\alpha)(1-2m)}{(x-\alpha)^m},$$

который можетъ исчезнуть лишь когда  $A_m = 0$ , ибо ни  $R'(\alpha)$ , ни  $1-2m \neq 0$ . Но тогда такимъ-же образомъ докажется, что  $A_{m-1} = 0$ , затѣмъ  $A_{m-2} = 0$  и такъ далѣе до  $A_0 = 0$ , т. е. что дробная часть  $\Phi(x)$  равна нулю, и слѣдовательно  $\Phi(x)$  есть цѣлая функция.

Отсюда слѣдуетъ прежде всего, такъ какъ члены высшей степени направо отъ знака равенства не сокращаются\*, что

$$\delta(f(x) + K(x)) = \delta X + \delta R - 1, \quad (4)$$

откуда выходитъ, такъ какъ  $\delta K(x) < \delta f(x)$ , что степень полинома  $X$ :

$$\delta X = \delta f(x) - (\delta R - 1) \quad (5)$$

— такъ что самый вопросъ возможенъ лишь пока

$$\delta f(x) \geq \delta R - 1, \quad (6)$$

— и, слѣдовательно, число его неопредѣленныхъ коэффициентовъ будетъ:

$$\delta X + 1 = \delta f(x) - (\delta R - 2), \quad (7)$$

тогда какъ всѣхъ уравненій, получаемыхъ чрезъ сравненіе коэффициентовъ при одинаковыхъ степеняхъ  $x$  въ обѣихъ частяхъ равенства (3) числомъ

$$\delta(f(x) + K(x)) + 1 = \delta X + \delta R, \quad (8)$$

болѣе числа  $\delta X + 1$  на

$$\delta R - 1.$$

Если мы возьмемъ теперь для  $K(x)$  полиномъ степени

$$\delta K(x) = \delta R - 2, \quad (10)$$

то общее число неопредѣленныхъ коэффициентовъ будетъ равно числу уравненій для ихъ опредѣленія. Эти уравненія всѣ будутъ независимы между собою. Дѣйствительно, если мы имѣемъ:

---

\* См. ниже равенства (11), гдѣ  $2m - \rho + 2$  очевидно никогда не можетъ быть  $= 0$ , если  $m > \rho - 2$ .

$$R(x) = a_0 x^\rho + a_1 x^{\rho-1} + a_2 x^{\rho-2} + \dots + a_\rho$$

$$f(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \dots + b_m$$

и положимъ, принимая во вниманіе (5) и (10),

$$X = \alpha_0 x^{m-\rho+1} + \alpha_1 x^{m-\rho} + \alpha_2 x^{m-\rho-1} + \dots + \alpha_{m-\rho+1}$$

$$K(x) = \beta_0 x^{\rho-2} + \beta_1 x^{\rho-3} + \beta_2 x^{\rho-4} + \dots + \beta_{\rho-2},$$

то первыя два изъ уравненій, о которыхъ идетъ рѣчь, будутъ:

$$b_0 = (2m - \rho + 2) a_0 \alpha_0, \quad (11)$$

$$b_1 = 2(m - \rho + 1) a_1 \alpha_0 + \rho a_0 \alpha_1;$$

каждое же изъ послѣдующихъ будетъ содержать кромѣ нѣкоторыхъ  $\alpha$  по одному только коэффициенту полинома  $K$ , — будутъ именно вида:

$$b_k = -\beta_{k-2} + \text{линейная функція отъ } (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-\rho+1})$$

— который не войдетъ ни въ одно изъ остальныхъ уравненій, а потому вторыя части ни котораго изъ нихъ не могутъ быть линейною функціей остальныхъ. Слѣдовательно, рѣшеніе будетъ одно, конечное и опредѣленное, и изъ (2) мы получимъ тогда:

$$\int \frac{f(x) dx}{2\sqrt{R(x)}} = X\sqrt{R(x)} - \int \frac{K(x) dx}{2\sqrt{R(x)}}.$$

Такимъ образомъ чрезъ отдѣленіе алгебраической части отъ нашего интеграла мы сведемъ его къ интегралу того же вида, въ которомъ степень полинома будетъ не превосходить  $\delta R - 2$ . Въ частномъ случаѣ она можетъ быть меньше  $\delta R - 2$ , можетъ даже случиться, что всѣ коэффициенты полинома  $K(x)$  окажутся равными нулю; въ такомъ случаѣ предложенный намъ ин-

теграль (1) будет интегрироваться алгебраически, такъ какъ вторая часть (12) приведется тогда къ первому члену ея.

#### 4. Переходя къ интегралу

$$\int \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}},$$

гдѣ  $\delta\varphi(x) < \delta\psi(x)$ , мы докажемъ, что всегда можно найти такой полиномъ  $K(x)$ , степени низшей чѣмъ  $\delta\psi(x) + \delta R(x)$ , что по придачѣ его къ числителю получится выраженіе:

$$\frac{\varphi(x) + K(x)}{\psi(x)} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}},$$

интегрирующееся алгебраически, именно такимъ образомъ, что будетъ:

$$\int \frac{\varphi(x) + K(x)}{\psi(x)} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} = \frac{X}{Y} \sqrt{R(x)} + C, \quad (2)$$

гдѣ

$$\delta X < \delta Y^*. \quad (3)$$

\* Что членъ не содержащій  $\sqrt{R(x)}$  приводится къ постоянной, докажется какъ и выше; что же касается предположенія о правильности дроби  $\frac{X}{Y}$ , то допустимъ противное и предположимъ, что вторая часть (2) есть

$$\left( \Theta(x) + \frac{X}{Y} \right) \sqrt{R(x)} + C,$$

гдѣ  $\frac{X}{Y}$  правильная дробь, а  $\Theta(x)$  цѣлая функція; дифференцируя и дѣля на  $\sqrt{R(x)}$ , мы получимъ тогда такое равенство:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(x) + K(x)}{\psi(x)} \frac{1}{2R(x)} &= \frac{YX' - XY'}{Y^2} + \frac{X}{Y} \cdot \frac{R'(x)}{2R(x)} + \\ &+ \Theta'(x) + \Theta(x) \frac{R'(x)}{2R(x)}; \end{aligned} \quad (b)$$

но здѣсь цѣлое можетъ заключаться только въ послѣднихъ двухъ членахъ второй части. Пусть  $A_m x^m$  старшій членъ въ  $\Theta(x)$ ; тогда во второй части (b) старшіе члены цѣлой части будутъ:

Дѣйствительно, дифференцируя, получимъ по умноженіи на  $2\sqrt{R(x)}$ :

$$\frac{\varphi(x) + K(x)}{\psi(x)} = \frac{(YX' - XY')}{Y^2} 2R(x) + \frac{X}{Y} R'(x),$$

или приводя къ одному знаменателю вторую часть:

$$\frac{\varphi(x) + K(x)}{\psi(x)} = \frac{(YX' - XY') 2R(x) + XYR'(x)}{Y^2}. \quad (4)$$

Здѣсь вторая часть можетъ сократиться только на дѣлителей полинома  $Y$ , и какъ два члена числителя содержатъ  $Y$  множителемъ, а третій его производную  $Y'$ , помноженную на  $X$  и  $R(x)$ , гдѣ  $X$  простой съ  $Y$ , то это сокращеніе можетъ произойти только на тѣхъ множителяхъ полинома  $Y$ , которые суть общіе или  $Y$  и  $Y'$  или  $Y$  и  $R(x)$ . Означая чрезъ  $\Theta$  общаго наибольшаго дѣлителя функцій  $Y$  и  $Y'$ , такъ что будетъ слѣдовательно:

$$\Theta = D(Y, Y'), \quad (5)$$

а также полагая

$$m A_m x^{m-1} + A_m \frac{\rho}{2} x^{m-1} = (m + \frac{\rho}{2}) A_m x^{m-1},$$

(если  $\delta R(x) = \rho$ ); но это должно исчезнуть, такъ какъ нѣтъ отъ знака  $=$  въ (b) стоитъ правильная дробь; слѣдовательно должно быть  $A_m = 0$ , такъ какъ  $m + \frac{\rho}{2}$  не равно нулю, какъ сумма положительныхъ чиселъ. Но тогда также докажется, что и  $A_{m-1} = 0$ , и наконецъ  $A_1 = 0$ . Далѣе  $A_0$  войдетъ въ такой членъ:

$$A_0 \frac{\rho}{2} \cdot \frac{1}{x},$$

которому сходственнаго между другими не найдется, такъ какъ въ прочихъ членахъ степень числителя меньше степени знаменателя по крайней мѣрѣ на 2 единицы; слѣдовательно  $A_0 = 0$ , такимъ образомъ  $\Theta(x) = 0$ , что и требовалось доказать.

$$Y: \Theta = P, \quad (6)$$

$$Y': \Theta = Q, \quad (7)$$

мы, по сокращеніи на  $\Theta$  второй части равенства (4), дадимъ ему такой видъ:

$$\frac{\varphi(x) + K(x)}{\psi(x)} = \frac{(PX' - XQ)2R(x) + XPR'(x)}{Y \cdot P}, \quad (8)$$

гдѣ вторая часть можетъ сократиться уже только на дѣлителей общихъ  $P$  и  $R(x)$ ; дѣйствительно, всякій множитель  $Y$  входитъ въ  $P$  одинъ разъ, а  $R(x)$  кратныхъ не имѣетъ; далѣе  $PX' - XQ$  простое съ  $P$ , и  $P$  входитъ множителемъ во второй членъ (8); что же касается до множителей общихъ  $P$  и  $R'(x)$ , которые могутъ случиться, то они не дѣлятъ ни  $R(x)$ , ибо  $R(x)$  не имѣетъ кратныхъ дѣлителей, ни  $PX' - XQ$ , которое, какъ сейчасъ уже упомянуто, простое съ  $P$ . Итакъ, вторая часть (8) можетъ сократиться только на общаго наибольшаго дѣлителя  $P$  и  $R(x)$ , который означимъ такъ:

$$z = D(P, R(x)); \quad (9)$$

введя еще обозначенія:

$$P: D(P, R(x)) = p$$

$$R(x): D(P, R(x)) = r(x), \quad (10)$$

мы получимъ изъ (8) по сокращеніи на  $z$  такое равенство:

$$\frac{\varphi(x) + K(x)}{\psi(x)} = \frac{(PX' - XQ)2r(x) + XpR'(x)}{Y \cdot p}, \quad (11)$$

гдѣ вторая часть будетъ уже несократимая дробь; что же касается первой части, то она можетъ сокращаться на нѣкоторый полиномъ  $q$ ; слѣдовательно мы будемъ имѣть изъ (11):

$$\varphi(x) + K(x) = [(PX' - XQ) 2r(x) + Xp R'(x)] \cdot q \quad (12)$$

$$\psi(x) = Y \cdot p \cdot q. \quad (13)$$

5. Первое изъ этихъ равенствъ дастъ полиномъ  $K(x)$ , когда будутъ извѣстны:  $P, Q, p, q, r(x)$  и  $X$ . Послѣдній, а съ нимъ и  $K(x)$  вполне опредѣлятся, — послѣ того какъ будутъ извѣстны  $P, Q, p, q, r(x)$  и еще  $Y$ , — изъ условія, чтобы полиномъ

$$K(x) = [(PX' - XQ) 2r(x) + Xp R'(x)] q - \varphi(x) \quad (14)$$

дѣлился безъ остатка на  $Y$ . Въ самомъ дѣлѣ, когда  $P, Q, p, q, r(x)$  и  $Y$  будутъ извѣстны, то во второй части (14) будетъ только  $\delta X + 1 = \delta Y$  неопредѣленныхъ величинъ, именно коэффициентовъ полинома  $X$ ; слѣдовательно для его опредѣленія, а съ нимъ вмѣстѣ и  $K(x)$ , можно поставить только  $\delta Y$  условій; а такое число условій и даетъ наше требованіе дѣлимости  $K(x)$  на  $Y(x)$ ; для этого, какъ извѣстно, остатокъ дѣленія, который будетъ степени  $\delta Y - 1 = \delta X$ , долженъ имѣть всѣ свои  $\delta Y$  коэффициентовъ равными нулю; потому уравненія для опредѣленія коэффициентовъ полинома  $X$  согласно этому требованію мы получимъ, выполнивъ дѣленіе второй части (14) на  $Y(x)$  и приравнивая нулю каждый коэффициентъ остатка этого дѣленія. Изъ этихъ уравненій коэффициенты  $X$ , а слѣдовательно потомъ и коэффициенты частнаго:

$$L(x) = \frac{[(PX' - XQ) 2r(x) + Xp R'(x)] q - \varphi(x)}{Y} \quad (15)$$

вполне опредѣлятся. Уравненія эти вполне независимы; въ самомъ дѣлѣ, если нѣкоторыя изъ нихъ были бы слѣдствіемъ остальныхъ, то равное число коэффициентовъ полинома  $X$ , а слѣдовательно и самый полиномъ  $X$  до нѣкоторой степени остались бы произвольными; но тогда изъ дѣлимости второй части (14)

на  $Y$  при произвольности полинома  $X$  слѣдовало бы необходимымъ образомъ, что коэффициенты при  $X$ ,  $X'$  и независящій отъ нихъ членъ, т. е.  $\varphi(x)$ , должны дѣлиться на  $Y$ ; но это послѣднее невозможно, ибо дробь  $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$  всегда берется несократимая, а  $Y$  по (13) есть дѣлитель ея знаменателя  $\psi(x)$ . Такъ какъ  $K(x)$  содержитъ только  $\delta Y$  произвольныхъ величинъ, то его нельзя подчинить требованію дѣлиться на полиномъ высшей степени чѣмъ  $Y$ ; наибольшей степени сократимости дроби  $\frac{K(x)}{\psi(x)}$ , прибавленной къ дроби, стоящей подъ нашимъ интеграломъ, можно достигнуть, слѣдовательно, только увеличеніемъ степени полинома  $Y$ .

6. Изъ (13) слѣдуетъ, что  $Y$ ,  $p$  и  $q$  суть дѣлители  $\psi(x)$ , и такъ какъ мы желаемъ собрать въ  $Y$  наивозможно большее число дѣлителей  $\psi(x)$ , чтобы увеличить его степень, то на долю  $q$  мы должны оставить наименьшее число ихъ, ибо  $p$  зависитъ отъ  $P$  и слѣдовательно отъ  $Y$ . Изъ (6) имѣемъ

$$Y = \theta \cdot P;$$

далѣе изъ (10) и (9) предыдущаго §

$$P = p \cdot z;$$

внося отсюда и изъ предыдущаго въ (13), будемъ имѣть:

$$\psi(x) = \theta \cdot p^2 \cdot z \cdot q, \quad (1)$$

отсюда слѣдуетъ, что наименьшее значеніе для  $q$  получимъ, если соберемъ въ немъ простыхъ множителей  $\psi(x)$ , отличныхъ отъ множителей полинома  $R(x)$ ; общіе же множители съ послѣднимъ взятые одинъ разъ собраны въ  $z$ . Написавъ (1) такимъ образомъ

$$\psi(x) = (\theta \cdot p) p \cdot z \cdot q, \quad (2)$$

въ произведеніи  $p \cdot z \cdot q$  будемъ имѣть все различныхъ множителей, тогда какъ въ  $(\Theta p)$  могутъ быть и одинакіе, причемъ входящіе въ  $p$  будутъ входить и въ  $\Theta p$ ; также могутъ входить въ  $\Theta p$  нѣкоторые изъ множителей  $z$ , притомъ множители  $\Theta p$  непременно будутъ входить по одному разу въ  $pz$ ; что же касается до множителей  $q$ , то они не будутъ входить въ  $\Theta p$ , ибо, по условію, это простые множители  $\psi(x)$ , отличные отъ множителей общихъ у  $\psi(x)$  съ  $R(x)$ . И такъ

$$p \cdot z \cdot q = Pq$$

будетъ произведеніе всѣхъ различныхъ множителей  $\psi(x)$ , взятыхъ по одному разу. Отсюда слѣдуетъ, что

$$\Theta p = D(\psi(x), \psi'(x)), \quad (I)$$

а

$$Pq = \psi(x) : D(\psi(x), \psi'(x)). \quad (II)$$

Такъ какъ множители  $q$  отличны отъ множителей  $R(x)$ , то общій наибольшій дѣлитель  $Pq$  и  $R(x)$  будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ  $P$  и  $R(x)$ , т. е. будетъ:

$$z = D(P, R(x)) = D(Pq, R(x)) \quad (III)$$

и потому можетъ быть найденъ.

Дѣля на него  $R(x)$ , найдемъ  $r(x)$ :

$$r(x) = R(x) : z; \quad (IV)$$

дѣля  $Pq$  на  $z$ , найдемъ  $pq$ :

$$pq = Pq : z. \quad (V)$$

Такъ какъ  $pq$  содержитъ простыхъ множителей, изъ которыхъ только входящіе въ  $p$  входятъ въ  $\Theta p$ ; то  $p$  будетъ общій наибольшій дѣлитель  $pq$  и  $\Theta p$ :

$$p = D(pq, \theta_p). \quad (\text{VI})$$

Найдя его, дѣлимъ на него  $pq$  и  $\theta_p$ ; получимъ:

$$q = pq : p. \quad (\text{VII})$$

$$\theta = \theta_p : p. \quad (\text{VIII})$$

Дѣля  $Pq$  на  $q$  найдемъ

$$P = Pq : q; \quad (\text{IX})$$

перемножая  $P$  и  $\theta$ , найдемъ

$$Y = P \cdot \theta; \quad (\text{X})$$

дифференцируя его найдемъ  $Y'$ , и затѣмъ  $Q$  по формулѣ

$$Q = \frac{Y'P}{Y}, \quad (\text{XI})$$

которая вытекаетъ изъ (6) и (7) § 4. Такимъ образомъ все, входящее въ выраженіе  $K(x)$ :

$$K(x) = [(PX' - XQ) 2r(x) + Xp R'(x)]q - \varphi(x) \quad (\text{XII})$$

будетъ теперь извѣстно до степени полинома  $X$  включительно; подставляя сюда вмѣсто  $X$  полиномъ степени  $\delta Y - 1$  съ неопределенными коэффициентами и дѣля вторую часть на  $Y$ , приравняемъ нулю каждый изъ  $\delta Y$  коэффициентовъ имѣющаго получиться остатка; тогда будемъ имѣть  $\delta Y$  уравненій, изъ которыхъ и найдемъ всѣ коэффициенты полинома  $X$ ; вставляя ихъ въ частное этого дѣленія

$$\frac{K(x)}{Y} = \frac{[(PX' - XQ) 2r(x) + Xp R'(x)]q - \varphi(x)}{Y} = L(x), \quad (\text{XIII})$$

найдемъ и полиномъ  $L(x)$ .

Послѣ этого мы будемъ имѣть:

$$\int \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} = \frac{X}{Y} \sqrt{R(x)} - \int \frac{L(x)}{p \cdot q} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}. \quad (\text{XIV})$$

*Примѣч.* Мы опредѣлили полиномъ  $K(x)$  изъ условія дѣлимости выраженія (14) на  $Y$ ; почему же не на другой полиномъ той же степени какъ  $Y$ , который можно получить, замѣняя нѣкоторые множители  $Y$  множителями  $q$ ? но легко видѣть, что это невозможно: въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ первая группа членовъ въ (14), имѣя множителемъ  $q$ , очевидно дѣлится на него, то остальной членъ —  $\varphi(x)$  въ такомъ случаѣ тоже долженъ дѣлиться на  $q$ , а это невозможно, ибо  $q$  есть дѣлитель  $\psi(x)$ . Отсюда слѣдуетъ, что вышеизложенное приведеніе гиперэллиптическаго интеграла посредствомъ отдѣленія алгебраической части есть единственное.

7. Степень полинома  $L(x)$  найдется изъ слѣдующихъ соображеній. Степень обоихъ членовъ выраженія:

$$PX' - XQ, \quad (1)$$

будетъ

$$\delta P + \delta X - 1 = \delta P + \delta Y - 2,$$

какъ не трудно видѣть, или, такъ какъ

$$\delta P = \delta p + \delta z,$$

слѣдующая:

$$\delta p + \delta z + \delta Y - 2;$$

по умноженіи (1) на  $2r(x)$ , мы получимъ для степени произведенія:

$$\delta p + \delta z + \delta r(x) + \delta Y - 2 = \delta p + \delta Y + \delta R - 2, \quad (2)$$

ибо

$$\delta R = \delta z + \delta r(x). \quad (3)$$

Второй членъ выраженія въ [ ] въ (14), или XII, будетъ степени той-же самой:

$$\delta p + \delta Y - 1 + \delta R - 1.$$

Если это выраженіе въ [ ] помножимъ на  $q$ , то степень произведенія будетъ:

$$\delta p + \delta q + \delta Y + \delta R - 2: \quad (4)$$

такъ какъ степень послѣдняго члена  $\varphi(x)$  есть

$$\delta \varphi(x) < \delta \psi(x),$$

а по (13) § 4:

$$\delta \psi(x) = \delta p + \delta q + \delta Y,$$

то мы видимъ, что вообще будетъ

$$\delta L(x) = \delta p + \delta q + \delta R - 2. \quad (5)$$

Отсюда слѣдуетъ, что въ (XIII) второй членъ разобьется, по разложеніи дроби  $\frac{L(x)}{p \cdot q}$  на простѣйшія, на сумму интеграловъ того-же вида какъ во второй части (12) § 3, которые разбиваются на интегралы перваго и втораго рода — обращающіеся въ  $\infty$  для  $x = \infty$ , — и интегралы третьаго рода, вида:

$$\int \frac{A dx}{(x - \alpha) 2\sqrt{R(x)}},$$

обращающіеся логарифмически въ  $\infty$  для  $x = \alpha$ ,

$$\sqrt{R(x)} = \pm \sqrt{R(\alpha)}.$$

8. Пояснимъ изложенное въ § 6 слѣдующимъ примѣромъ. Пусть данъ интегралъ

$$\int \frac{(x^2 + 1) dx}{x^2(x - 1)\sqrt{x^3 - 1}}; \quad (1)$$

найдемъ такой полиномъ  $K(x)$ , чтобы было

$$\int \frac{(x^2 + 1 + K(x)) dx}{x^2(x-1)\sqrt{x^3-1}} = \frac{X}{Y} \sqrt{x^3-1}. \quad (2)$$

Въ нашемъ интегралѣ слѣдовательно:

$$R(x) = x^3 - 1 \quad (3)$$

$$\varphi(x) = x^2 + 1 \quad (4)$$

$$\psi(x) = x^2(x-1), \quad (5)$$

и потому будетъ:

$$\text{I} \quad D(\psi(x), \psi'(x)) = D(x^2(x-1), 3x^2 - 2x) = x = \theta p;$$

$$\text{II} \quad \psi(x) : \theta p = x^2(x-1) : x = x(x-1) = Pq;$$

$$\text{III} \quad D(Pq, R(x)) = D(x(x-1), x^3-1) = x-1 = D(P, R(x)) = z;$$

$$\text{IV} \quad R(x) : z = (x^3-1) : (x-1) = x^2 + x + 1 = r(x);$$

$$\text{V} \quad Pq = z = x(x-1) : (x-1) = x = pq;$$

$$\text{VI} \quad D(\theta p : pq) = D(x, x) = x = p;$$

$$\text{VII} \quad pq : p = x : x = 1 = q;$$

$$\text{VIII} \quad \theta p : p = x : x = 1 = \theta;$$

$$\text{IX} \quad Pq : q = x(x-1) : 1 = x(x-1) = P;$$

$$\text{X} \quad Y = \theta \cdot P = 1 \cdot x(x-1) = x^2 - x; \quad Y' = 2x - 1; \quad \delta Y = 2;$$

$$\text{XI} \quad Q = \frac{Y' \cdot P}{Y} = \frac{(2x-1) \cdot x(x-1)}{x(x-1)} = 2x - 1;$$

такъ какъ  $\delta Y = 2$ , то полагаемъ

$$X = ax + b; \text{ слѣд. } X' = a,$$

и потому имѣемъ:

$$\begin{aligned} K(x) &= [(PX' - XQ) 2r(x) + Xp \cdot R'(x)] q - \varphi(x) = \\ &= [\{x(x-1)a - (ax+b)(2x-1)\} 2(x^2+x+1) + \\ &\quad + (ax+b) \cdot x \cdot 3x^2] \cdot 1 - x^2 - 1 = \\ &= ax^4 - (2a+b)x^3 - (2a+2b+1)x^2 - 2bx + 2b - 1. \end{aligned}$$

Дѣля на  $Y = x^2 - x$ , получимъ въ частномъ:

$$L(x) = ax^2 - (a+b)x - (3a+3b+1),$$

а въ остаткѣ:

$$-(3a+5b+1)x + 2b - 1;$$

полагая

$$\left. \begin{aligned} 3a+5b+1 &= 0, \\ 2b-1 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

находимъ:

$$a = -\frac{7}{6}, \quad b = \frac{1}{2};$$

слѣд.

$$X = -\frac{7x-3}{6}$$

и

$$L(x) = -\frac{1}{6} (7x^2 - 4x - 6),$$

и потому окончательно будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+1}{x^2(x-1)} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{x^3-1}} &= -\frac{7x-3}{6x(x-1)} \sqrt{x^3-1} + \\ &+ \frac{1}{6} \int \frac{7x^2-4x-6}{x} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{x^3-1}}. \end{aligned}$$

Послѣдній интегралъ разобьется на три интеграла 2-го, 1-го и 3-го рода.